

Exercice 1 (6 points)

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par : $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n - 1}{u_n + 1}$, $(n \in \mathbb{N})$

- 0,25 1) a) Calculer u_1
- 1 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$
- 1 c) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{(u_n - 1)^2}{u_n + 1}$ puis déterminer la monotonie de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$
- 0,5 d) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
- 2) On pose pour tout n de $\mathbb{N}$: $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$
- 1,5 a) Prouver que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est arithmétique de raison $r = 1$, puis exprimer v_n en fonction de n .
- 1 b) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = 1 + \frac{1}{v_n}$ puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n = \frac{n+4}{n+2}$
- 0,5 c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.
- 0,5 3) Montrer que $v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{(n+1)(n+4)}{4}$.

Exercice 2 (8,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $I =]-4; +\infty[$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{2}{\sqrt{x+4}}$ et soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -4^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu
- 1 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x - 1$ est asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.
- 0,5 c) Montrer que (C) est au dessus de (Δ) sur I .
- 1 2) a) Montrer que : $(\forall x \in I) \quad f'(x) = \frac{(x+4)\sqrt{x+4} - 1}{(x+4)\sqrt{x+4}}$
- 0,5 b. Calculer $f'(-3)$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu
- 0,5 c) Montrer que si $x > -3$ alors $f'(x) > 0$

- 1 d) Dresser le tableau de variations de f sur I
- 1 a) a) Ecrire l'équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
- 1 b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans l'intervalle $]-3,9; -3,8[$.
- 1 c) Construire la courbe (C) et ses asymptotes.

Exercice 3 (5,5 points)

Soit la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ définie par $u_0 = 7$ et $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} = \frac{5}{8} u_n + 3$

- 0,75 1) a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 8$
- 0,75 b) Montrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est croissante
- 0,5 c) Démontrer que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ est convergente.
- 2) On pose: $v_n = u_n - 8$ pour $n \in \mathbb{N}$.
- 0,5 a) Prouver que la suite $(v_n)_{n \geq 0}$ est géométrique de raison $q = \frac{5}{8}$
- 1 b) Exprimer v_n en fonction de n puis déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n = 8 - \left(\frac{5}{8}\right)^n$.
- 0,5 c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_n$.
- 3°) On pose: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ ($n \in \mathbb{N}$)
- 1 a) Montrer que: $S_n = -\frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{5}{8}\right)^{n+1}\right)$
- 0,5 b) Démontrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) S_n > -\frac{8}{3}$